V Международная
научно-практическая конференция

«Актуальные проблемы математики и информатики: теория, методика, практика»

СБОРНИК МАТЕРИАЛОВ

18-20 апреля 2019 года

Елец, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Секция 1. СОВРЕМЕННЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКИ. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА

Абулов М.О.

Каршиский ГУ, город Карши, Узбекистан

АННОТАЦИЯ

В данной работе исследуется краевая задача смешанно-составного типа и доказывается существование и единственность слабых решений данной задачи.
Ключевые слова. Уравнения Чаплыгина, сопряженная задача, слабые решения, сильные решения.

В области $D=\{(x,y,t): -1<x<1,\ 0<y<1,\ 0<t<T\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\Big(k(x)u_{tt}+u_{xx}+u_{yy}\Big)=f(x,y,t) \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$u\big|_{\partial D}=0,\ u_x\big|_{x=1}=0 \qquad (2)$$

где, $k(0)=0,\ k'(x)>0$.

Отметим, что близкие задачи исследована в [3], задача (1), (2) можно рассматривать как обратная задача для уравнения Чаплыгина[1]. Через $\vec{n}=(n_x,n_y,n_t)$ обозначим вектор внешней нормали к границе области D. Легко проверить, что формально сопряженной задачей к задаче (1), (2) является задача

$$L^{*}v \equiv k(x)v_{xtt}-v_{xxx}-v_{xyy}=g(x,y,t), \qquad (3)$$

$$v\big|_{\partial D}=0,\ v_x\big|_{x=-1}=0 \qquad (4)$$

Обозначим через C_L, C_{L^*} классы функций из $C^3(\bar{D})$, удовлетворяющие, соответственно, краевым условиям (2), (4). Через $H(D)$, $H^*(D)$ обозначим пространства Соболева $W_2^1(D)$, полученные замыканием соответственно классов функций C_L, C_{L^*} по норме

$$\|u\|_{1.D}^2=\int_D (u_t^2+u_x^2+u_y^2+u^2)\,dD.$$

Определение 1. Функцию $u(x,y,t)\in L_2(D)$ будем называть слабым обобщенным решением краевой задачи (1),(2), если для всех функций $v(x,y,t)\in C_{L^*}$ выполнено тождество

$$(u,L^*v)_0=(f,v)_0,\ \ \forall v\in C_{L^*}.$$

Определение 2. Функцию $u(x,y,t)\in L_2(D)$ будем называть сильным обобщенным решением краевой задачи (1), (2), если существует последовательность функций $\{u_i\}\in C_L$ таких, что

$$\lim_{i\to\infty}\|u_i-u\|_{0.D}=\lim_{i\to\infty}\|Lu_i-f\|_{0.D}=0.$$

Лемма. Пусть $k(x)\in C^1(\bar{D}),\ f(x,y,t)\in L_2(D)$ и $k'(x)\ge\delta>0$

Тогда существует такая константа $\lambda_0<0$, что для всех констант $\lambda<\lambda_0$ имеет место неравенство

$$\int_D Lu\cdot\alpha\cdot u\,dD=(Lu,\alpha(x)u)_0\ge m\|u\|_{H(D)}^2\quad \forall u\in C_L,\ m>0,$$

$$\|Lu\|_0\ge m\|u\|_{H(D)}, \qquad (5)$$

где, $\alpha(x)=\lambda+x,\ \lambda-$ вещественная постоянная.

Доказательство. Рассмотрим интеграл $(Lu,(\lambda+x)u)_0$ в области D. После интегрирования по частям, получим

$$\int_D Lu(\lambda+x)u\,dD=\int_D\Big[\frac{1}{2}(-k'_x(\lambda+x)+k)u_t^2+\frac{3}{2}u_x^2+\frac{1}{2}u_y^2\Big]dD+\int_{\partial D}[(\lambda+x)(u(k'_xu_tn_t+$$

$$+ku_{tx}n_t+u_{xx}n_x+u_{xy}n_y-\frac{1}{2}ku_t^2n_x-\frac{1}{2}u_x^2n_x-\frac{1}{2}u_y^2n_x)-u_xn_x]dS=I_1+I_2.$$

Легко видеть, выбором константы $\lambda<0$ мы добьемся неравенства

$$I_1\geq m\left(\int_D(u_t^2+u_x^2+u_y^2)dD\right)^{1/2}\quad\forall u\in C_L,\ m>0.$$

Из граничного условия следует, что интеграл $I_2\geq 0$ и $\int_D u^2dD\leq m_1\int_D u_x^2dD$. Так как $\|Lu\|_0\geq m\|u\|_{H(D)}$, тем самым лемма доказана. Следствие. Сильное решение задачи (1), (2) единственно. Теорема. Пусть выполнено условие леммы для коэффициента уравнения (1), тогда для любой функции $f(x,y,t)\in L_2(D)$ существует слабое обобщенное решение.

Доказательство. Рассмотрим выражение $(L^*v,(\lambda-x)v)_0$ для $v\in C_{L^*}$. После интегрирования по частям, получим

$$\int_D L^*v(\lambda-x)vdD=\int_D[\frac{1}{2}(-\mathrm{k}'_x(\lambda-x)+\mathrm{k})v_t^2+\frac{3}{2}v_x^2+\frac{1}{2}v_y^2]dD+\int_{\partial D}[(\lambda-x)v(-kv_{xt}n_t-$$

$$-v_{xx}n_x-v_{xy}n_y+\frac{1}{2}v_x^2n_x+\frac{1}{2}v_y^2n_x+\frac{1}{2}kv_t^2n_x)-v_xvn_x]dS=I_1'+I_2'.$$

Нетрудно видеть, что выбором константы $\lambda<0$ мы добьемся неравенства

$$I_1'\geq m_1\left(\int_D(v_t^2+v_x^2+v_y^2)dD\right)^{1/2}\quad\forall v\in C_{L^*},\ m_1>0.$$

Из граничного условия (4) следует, что интеграл $I_2'\geq 0$ и $\int_D v^2dD\leq m_2\int_D v_x^2dD$.

Так как доказано неравенство

$$(L^*v,(\lambda-x)v)_0\geq m_1\|v\|^2_{H^*(D)},\ v\in C_{L^*},\ m_1>0,\tag{6}$$

$$\|Lv\|_0^2\geq m\|v\|^2_{H^*(D)}\geq m_1\|v\|_0^2.\tag{7}$$

Рассмотрим функционал $l(v)=(f,v)_0=\int_D f\cdot vdD,\quad f\in L_2(D),\ v\in C_{L^*}.$

При фиксированном $f(x,y,t)\in L_2(D)$ для этого функционала справедлива оценка

$$|(f,v)_0|\leq\|f\|_0\|v\|_0\leq m\|f\|_0\|L^*v\|_0.$$

Отсюда и из неравенства (7) следует, что $l(v)$ можно рассматривать как линейный непрерывный функционал относительно L^*v над некоторым подпространством пространства $L_2(D)$. Продолжая этот функционал по теореме Хана-Банаха на все пространства $L_2(D)$ и используя теорему Рисса о предоставлении ограниченного функционала над гильбертовым пространством [2], получим, что существует функция $\mathrm{u}(x,y,t)\in L_2(D)$ такая, что

$$(u,L^*v)_0=(f,v)_0,\quad\forall v\in C_{L^*}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Для полученного решения $u\in H(D)$ краевые условия $u_x\big|_{x=0}=0$ вообще говоря, не имеют смысла, но если это решение является более гладким (например, из $W_2^2(D)$, то нетрудно показать, что и это условие выполняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. Москва, Иностр. лит., 1961. -208 с.
2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Наука, 1962. 251 с.
3. Салахиддинов М.С. уравнения смешанно- составного типа. Ташкент: Фан, 1974, 156 с.